	Nombre	
	Fecha	
	Curso	**LIMITES, DERIVADAS E INTEGRALES**
	Profesor	**José Zúñiga N.**

INSTRUCCIONES: A continuación, encontraras axiomas, definiciones y teoremas del conjunto de los números reales, vistos en clases, luego de repasar los contenidos vistos encontraras en este material de estudio la aplicación de los contenidos (desde la pag 8 hasta la 9), en particular demostraciones resueltas de matemáticas. Debes comprender los pasos utilizados para demostrar.

Para apoyarte con los contenidos puedes revisar los siguientes links en ese orden.

https://www.youtube.com/watch?v=kSNoqtTdtmU

https://www.youtube.com/watch?v=5yTUdoQn1X0

https://www.youtube.com/watch?v=OkBxoSJ4fP0

https://www.youtube.com/watch?v=q6h_TBKWOj8&list=PLPLAPtkU-zZB789TVAIP4-W2BrCEkQaTb

https://www.youtube.com/watch?v=u58M7e2fb0c&list=PLPLAPtkU-zZB789TVAIP4-W2BrCEkQaTb&index=2

https://www.youtube.com/watch?v=VH3mXlQUWHI&list=PLPLAPtkU-zZB789TVAIP4-W2BrCEkQaTb&index=3

https://www.youtube.com/watch?v=5Zh-QZ2HaCA&list=PLPLAPtkU-zZB789TVAIP4-W2BrCEkQaTb&index=4

Las propiedades básicas de la suma y el producto constituyen los **axiomas de campo**, los cuales son verdades evidentes, que no necesitan demostración y que son la base para demostrar todas las demás propiedades.

Axioma de Campo

Axioma 2.1 *$\mathbb{R}$ es cerrado bajo la suma:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x + y \in \mathbb{R}).$$

Axioma 2.2 *La suma de números reales es conmutativa:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ (x + y = y + x).$$

Axioma 2.3 *La suma de números reales es asociativa:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ \forall z \in \mathbb{R}\ (x + (y + z) = (x + y) + z).$$

Axioma 2.4 *El cero es un número real y es neutro de la suma de números reales:*

$$(0 \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in \mathbb{R}\ (x + 0 = x)).$$

Axioma 2.5 *Todo número real tiene un inverso aditivo real:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists y \in \mathbb{R}\ (x + y = 0).$$

Axioma 2.6 *$\mathbb{R}$ es cerrado bajo el producto:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y \in \mathbb{R}).$$

Axioma 2.7 *El producto de números reales es conmutativo:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = y \cdot x).$$

Axioma 2.8 *El producto de números reales es asociativo:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ \forall z \in \mathbb{R}\,(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z).$$

Axioma 2.9 *El uno es un número real diferente de cero y es neutro del producto de números reales:*

$$(1 \in \mathbb{R} \wedge 1 \neq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{R}\,(x \cdot 1 = x)).$$

Axioma 2.10 *Todo número real diferente de cero tiene un inverso multiplicativo real:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,(x \neq 0 \to \exists y \in \mathbb{R}\,(x \cdot y = 1)).$$

Axioma 2.11 *El producto de números reales es distributivo sobre la suma de números reales:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,\forall y \in \mathbb{R}\,\forall z \in \mathbb{R}\,(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z).$$

Teorema

Teorema 2.1 *Las siguientes propiedades se cumplen en $\mathbb{R}$:*

(I) *Cancelación de la suma:*

$$(x + z = y + z \to x = y).$$

(II) *Cancelación del producto:*

$$((x \cdot z = y \cdot z \wedge z \neq 0) \to x = y).$$

(III) *El producto de un número real por cero es cero:*

$$x \cdot 0 = 0.$$

(IV) *No existen divisores de cero:*

$$(x \cdot y = 0 \to (x = 0 \vee y = 0)).$$

(V) *El neutro aditivo es único:*

$$(\forall y \in \mathbb{R}\, (x + y = y) \to x = 0).$$

(VI) *El neutro multiplicativo es único:*

$$(\forall y \in \mathbb{R}\, (x \cdot y = y) \to x = 1).$$

(VII) *El inverso aditivo es único:*

$$((x + y = 0 \wedge x + z = 0) \to y = z).$$

(VIII) *El inverso multiplicativo es único:*

$$((x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \to y = z).$$

Definición

Definición 2.1 *Inverso aditivo*

El inverso aditivo de un número real es aquel número real que sumado con él da cero:

$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in \mathbb{R}\; (-x = y \;\leftrightarrow\; x + y = 0).$

Esta definición es correcta dado que hemos establecido la unicidad del inverso aditivo en Teorema 2.1 (VII).

Definición 2.2 *Resta*

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\,(x - y = x + (-y))$.

Es decir, restar es sumar el inverso aditivo.

Definición 2.3 *Inverso multiplicativo*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\left(x \neq 0 \to \left(\frac{1}{x} = y \quad \leftrightarrow \quad x \cdot y = 1\right)\right).$$

*Esta definición es correcta por Teorema 2.1 (*VIII*).*

Definición 2.4 *División*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\left(y \neq 0 \to \frac{x}{y} = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)\right).$$

Es decir, dividir es multiplicar por el inverso multiplicativo.

Definición 2.5 *Cuadrado*

$\forall x \in \mathbb{R}\,(x^2 = x \cdot x)$.

Orden de los Números Reales 2.3

Las siguientes son verdades evidentes que describen las propiedades básicas de la relación **menor que** en los números reales. Toda otra propiedad del orden se puede demostrar a partir de éstas.

Axioma de Orden

Axioma 2.12 *El orden de los números reales es lineal:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, (x \neq y \to (x < y \vee y < x)).$$

Axioma 2.13 *El orden de los números reales es asimétrico:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, (x < y \to \neg(y < x)).$$

Axioma 2.14 *El orden de los números reales es transitivo:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{R}\, ((x < y \wedge y < z) \to x < z).$$

Axioma 2.15 *El orden de los números reales se preserva al sumar un número real:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{R}\, (x < y \to x + z < y + z).$$

En estas definiciones también se pueden omitir los cuantificadores cuando no se preste a confusión. Por ejemplo la Definición 2.3 puede expresarse simplemente por:

$$x \neq 0 \to \left(\frac{1}{x} = y \;\leftrightarrow\; x \cdot y = 1\right).$$

Como ejemplos de propiedades de los nuevos conceptos que se pueden demostrar, tenemos:

Teorema

Teorema 2.2 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces:*

(I) $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

(II) $(-1)\, x = -x$.

(III) $(x^2 = 0 \to x = 0)$.

Axioma 2.16 *El orden de los números reales se preserva al multiplicar por un número real positivo:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{R}\, ((x < y \wedge 0 < z) \rightarrow x \cdot z < y \cdot z).$$

Con estos axiomas se pueden definir los conceptos de **mayor, mayor o igual, menor o igual, positivo y negativo** para números reales.

Definición

Definición 2.6 *Relaciones de Orden en* $\mathbb{R}$

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, *entonces:*

(I) $(x > y \leftrightarrow y < x)$,
(x es mayor que y).

(II) $(x \geq y \leftrightarrow (x > y \vee x = y))$,
(x es mayor o igual que y).

(III) $(x \leq y \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$,
(x es menor o igual que y).

(IV) $(x$ *es positivo* $\leftrightarrow x > 0)$.

(V) $(x$ *es negativo* $\leftrightarrow x < 0)$.

(VI) $(x > y \leftrightarrow x - y > 0)$.

(VII) $((x > 0 \wedge y > 0) \rightarrow x \cdot y > 0)$.

(VIII) $1 > 0$.

(IX) $\left(x > 0 \rightarrow \dfrac{1}{x} > 0\right)$.

(X) $x^2 \geq 0$.

(XI) $((x < y \wedge z < 0) \rightarrow x \cdot z > y \cdot z$

(XII) $\left((x > 0 \wedge x < y) \rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}\right)$.

(XIII) $\left(x < y \rightarrow x < \dfrac{x+y}{2} < y\right)$.

(XIV) $x - 1 < x < x + 1$.

Ejercicio 1: Demuestre que

$$x + (y + z) = (x + z) + y$$

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= x + (z + y), \quad \text{(Conmutatividad)} \\ &= (x + z) + y, \quad \text{(Asociatividad)} \end{aligned}$$

Ejercicio 2: Demuestre que:

$$(x + y) \cdot z = xz + yz$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} (x + y) \cdot z &= z \cdot (x + y), \quad \text{(Conmutatividad)} \\ &= zx + zy, \quad \text{(Distributividad)} \\ &= xz + yz, \quad \text{(Conmutatividad)} \end{aligned}$$

Ejercicio 3: Demostrar que:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} \frac{ac}{bc} &= ac(bc)^{-1} \\ &= ac(b^{-1}c^{-1}), \quad \text{(Prop. 9)} \\ &= ac(c^{-1}b^{-1}), \quad \text{(Conmutatividad)} \\ &= a(cc^{-1})b^{-1}, \quad \text{(Asociatividad)} \\ &= a \cdot 1 \cdot b^{-1}, \quad \text{(Inverso Multiplicativo)} \\ &= ab^{-1}, \quad \text{(Neutro Multiplicativo)} \\ &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4: Demostrar que:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= ab^{-1} - cd^{-1} \\
&= ab^{-1} \cdot 1 - c \cdot 1 \cdot d^{-1}, \quad \text{(Neutro Multiplicativo)} \\
&= ab^{-1}(dd^{-1}) - c(bb^{-1})d^{-1}, \quad \text{(Inverso Multiplicativo)} \\
&= ab^{-1}(d^{-1}d) - c(bb^{-1})d^{-1}, \quad \text{(Conmutatividad)} \\
&= a(b^{-1}d^{-1})d - cb(b^{-1}d^{-1}), \quad \text{(Asociatividad)} \\
&= ad(bd)^{-1} - bc(bd)^{-1}, \quad \text{(Conmutatividad)} \\
&= (ad - bc)(bd)^{-1}, \quad \text{(Distributividad)} \\
&= \frac{ad - bc}{bd}.
\end{aligned}$$