Nombre: ____Curso: _____________ Fecha: _______________

Números Complejos

Se les denomina números complejos al conjunto universo de todos los números, ahora por otro lado para estudiarlos, los definiremos de la siguiente forma.

$$\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}\ \ |\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}\} \quad \boldsymbol{forma\ binomial}$$

$$\boldsymbol{C} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\ \ |\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}\}\ \boldsymbol{forma\ cartesiana}$$

i) Notación de los Complejos

a.- Todo número complejo de la forma $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0})$ es real puro

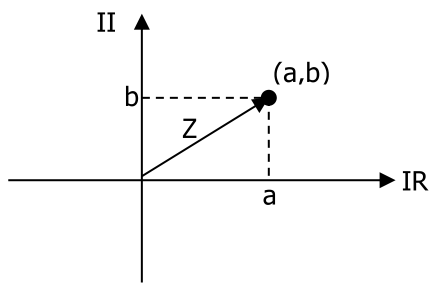
b.- Todo número complejo de la forma $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b})$ es imaginario puro

c.- Todo número complejo está formado de: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\begin{cases} \boldsymbol{a}: \boldsymbol{parte\ real} \\ \boldsymbol{b}: \boldsymbol{parte\ imag}. \end{cases}$

ii) Representación Gráfica:

Eje x: Se llama eje Real

Eje y: Se llama eje Imaginario



iii) Igualdad de Complejos

Si $\boldsymbol{Z_1} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{Z_2} = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \quad \boldsymbol{Entonces\ si\ Z_1} = \ \boldsymbol{Z_2} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$

iv) Complejo Conjugado

Si $\boldsymbol{Z_1} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$**,** entonces llamaremos **el conjugado** de Z **o** $\overline{\boldsymbol{Z}} = (\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b})$

Si $\boldsymbol{Z_1} = \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{bi}$**,** entonces llamaremos **el conjugado** de Z **o** $\overline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{a} \mp \boldsymbol{bi}$

Ejemplo: si $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{2} + \boldsymbol{3i}$ **el conjugado será** $\overline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{2} - \boldsymbol{3i}$

Operatoria en los Complejos

1.- Adición de Complejos: Definición: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}\ ; \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d})$

Propiedades de la adición en $\mathbb{C}$

a) Clausura:

$$\forall\ \boldsymbol{Z_1},\ \boldsymbol{Z_2} \in\ \mathbb{C}\ \Rightarrow \boldsymbol{Z_1} +\ \boldsymbol{Z_2} \in\ \mathbb{C}$$

b) Asociativa:

$$\forall\ \boldsymbol{Z_1},\ \boldsymbol{Z_2},\ \boldsymbol{Z_3} \in\ \mathbb{C} \Rightarrow (\boldsymbol{Z_1} +\ \boldsymbol{Z_2}) +\ \boldsymbol{Z_3} = \boldsymbol{Z_1} + (\boldsymbol{Z_2} +\ \boldsymbol{Z_3})$$

c) Elemento Neutro:

"Es el complejo nulo (0,0)" $\quad \forall\ \boldsymbol{Z} \in\ \mathbb{C} \Rightarrow\ \boldsymbol{Z} + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{Z}$

d) Conmutatividad:

$$\forall\ \boldsymbol{Z_1},\ \boldsymbol{Z_2} \in\ \mathbb{C} \Rightarrow \boldsymbol{Z_1} +\ \boldsymbol{Z_2} = \boldsymbol{Z_2} + \boldsymbol{Z_1}$$

e) Elemento Inverso Aditivo:

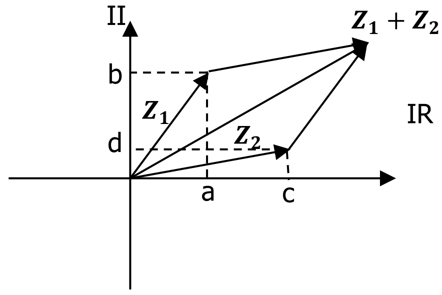
$$\forall\ \boldsymbol{Z} \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists!\ (-\boldsymbol{Z}) \in \mathbb{C}/\boldsymbol{Z} \pm \boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$$

Ej. Si $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}) \Rightarrow\ -\boldsymbol{Z} = (-\boldsymbol{2}, -\boldsymbol{3})$

2.- Sustracción de Complejos: Definición: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}\ ; \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d})$

Si $\boldsymbol{Z_1} \wedge \boldsymbol{Z_2} \in \mathbb{C} \Rightarrow \boldsymbol{Z_1} - \boldsymbol{Z_2} \Rightarrow \boldsymbol{Z_1} + (-\boldsymbol{Z_2})$

Representación Gráfica de la adición



3.- Multiplicación de Complejos:

Definición: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bd}\ ; \boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc})$

Ej. $(2,3) \cdot (4,-3) = (\mathbf{2 \cdot 4 - 3 \cdot (-3)\ ;\ 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4}) = (\mathbf{8 + 9\ ; -6 + 12}) = (\mathbf{17, 6})$

Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{C}$

a) **Clausura:**

$$\forall\, \boldsymbol{Z_1},\ \boldsymbol{Z_2} \in \mathbb{C} \Rightarrow \boldsymbol{Z_1} \cdot \boldsymbol{Z_2} \in \mathbb{C}$$

b) **Asociativa:**

$$\forall\, \boldsymbol{Z_1},\ \boldsymbol{Z_2},\ \boldsymbol{Z_3} \in \mathbb{C} \Rightarrow (\boldsymbol{Z_1} \cdot \boldsymbol{Z_2}) \cdot \boldsymbol{Z_3} = \boldsymbol{Z_1} \cdot (\boldsymbol{Z_2} \cdot \boldsymbol{Z_3})$$

c) **Elemento Neutro:**

"Es el complejo (1,0)" $\forall\, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{C} \Rightarrow \boldsymbol{Z} \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \boldsymbol{Z}$

d) **Inverso multiplicativo:**

$$\forall\, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{C} \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \exists\, \boldsymbol{Z^{-1}} ./ \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{Z^{-1}} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{Si\ Z} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \Rightarrow \boldsymbol{Z^{-1}} = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}}, \frac{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}}\right)$$

e) **Conmutatividad:**

$$\forall\, \boldsymbol{Z_1},\ \boldsymbol{Z_2} \in \mathbb{C} \Rightarrow \boldsymbol{Z_1} \cdot \boldsymbol{Z_2} = \boldsymbol{Z_2} \cdot \boldsymbol{Z_1}$$

f) **Distributividad:**

$$\forall\, \boldsymbol{Z_1},\ \boldsymbol{Z_2},\ \boldsymbol{Z_3} \in \mathbb{C} \Rightarrow \boldsymbol{Z_1} \cdot (\boldsymbol{Z_2} + \boldsymbol{Z_3}) = \boldsymbol{Z_1} \cdot \boldsymbol{Z_2} + \boldsymbol{Z_1} \cdot \boldsymbol{Z_3}$$

g) **Multiplicación de un Real por un complejo**

$$\boldsymbol{Si\ n} \in \mathbb{R} \wedge \mathbb{Z}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{C} \Rightarrow \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} \cdot ; \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b})$$

Calculo del Módulo o la Norma de un Complejo

Si $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ **, entonces el modulo o norma de z es** $|\boldsymbol{Z}| = \sqrt{\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}}$

iv).- El Numero Imaginario i

Definición: Sea $\boldsymbol{i} = \sqrt{-\mathbf{1}}$ "Llamaremos numero imaginario a aquellos que son solución de la ecuación de la forma: $x^2 = b\ \forall\ b < 0$ "

Potencias de i

$\boldsymbol{i^1 = i}$; $\boldsymbol{i^2 = -1}$; $\boldsymbol{i^3 = i^2 \cdot i = -i}$; $\boldsymbol{i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1}$

Estos valores se repiten de forma CICLICA $\boldsymbol{i^n = i^{4p+k} = i^k}$ $\boldsymbol{0} < k < 3$

División de complejos:

Para dividir $\boldsymbol{Z_1 : Z_2}$**,** podemos realizarla usando la amplificación por el conjugado del divisor :

$$\frac{\boldsymbol{Z_1}}{\boldsymbol{Z_2}} = \frac{\boldsymbol{Z_1}}{\boldsymbol{Z_2}} \cdot \frac{\overline{\boldsymbol{Z_2}}}{\overline{\boldsymbol{Z_2}}} \qquad \forall\, Z_2 \neq (0,0)$$

Ej. $\frac{2+5i}{2-5i} = \frac{2+5i}{2-5i} \cdot \frac{2+5i}{2+5i} = \frac{4+20i+25i^2}{4-25i^2} = \frac{-21+20i}{29}$

Propiedades Adicionales

1.- La suma de dos complejos conjugados da un real puro.

$$\boldsymbol{(a+bi) + (a-bi) = 2a}$$

2.- El producto de dos complejos conjugados da un real puro y positivo.

$$\boldsymbol{(a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 + b^2}$$

3.- La resta de dos complejos conjugados da un imaginario puro.

$$\boldsymbol{(a+bi) - (a-bi) = 2bi}$$

4.- $\boldsymbol{\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}}$

5.- $\boldsymbol{\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}}$

6.- $\boldsymbol{\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}}$

7.- $\boldsymbol{\overline{\overline{Z_1}} = Z_1}$

Ejercicios PSU

1). Si $Z = -3 - i$, ¿Cuál es el valor de $3|Z| + |\bar{Z}|$?

A) $2\sqrt{5}$
B) $6\sqrt{5}$
C) $3\sqrt{102}$
D) $4\sqrt{10}$
E) 8

2) Si $Z_1 = 2 + bi$ y $Z_2 = -1 + 2i$ ¿Qué valor debe tener “b” para que $Z_1 \cdot Z_2$ sea un número imaginario puro?

A) -2
B) -1
C) 0
D) 1
E) 4

3) Si $Z_1 = a - 3i$ y $Z_2 = a + 5i$ ¿Qué valor debe tener "a" para que $Z_1 \cdot Z_2$ sea un número real?

A) -2
B) 0
C) 2
D) 3
E) 5

4) $Z = a + bi$, la diferencia entre el inverso aditivo de Z y su conjugado es:

A) Un número real
B) Un numero imaginario
C) Una unidad
D) Dos veces el complejo inicial
E) Ninguna de las Anteriores

5) ¿Qué valores debe tener x e y respectivamente para $\frac{x+yi}{2-3i} = -2 + 3i$?

A) 1 y 3
B) 3 y 5
C) 5 y 7
D) 5 y 12
E) 5 y 13

6) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones de segundo grado tiene como solución la raíz $x = 1 - \sqrt{5}i$?

A) $x^2 - 2x = 0$
B) $x^2 - 2x + 6 = 0$
C) $x^2 + 2x + 6 = 0$
D) $x^2 - 2x - 6 = 0$
E) $x^2 + 2x - 6 = 0$

7) Dada la expresión: $x^4 + 13x^2 + 36$ tiene como factores en el conjunto de los complejos:

I) $(x - 3i)$ II) $(x + 2i)$ II) $(x - 9i)$

A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo III
D) Solo II y III
E) Todas

8) $\left(13 - \sqrt{-4}\,\right) - \left(-5 - \sqrt{-9}\,\right) =$

A) $18 + 5i$
B) $18 + i$
C) $18 - i$
D) $8 + i$
E) $8 - i$

9) $Z = 3 + 4i$, entonces ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\bar{Z} = 3 - 4i$ II) $Z \cdot \bar{Z} = 25$ III) $|Z| = 25$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) I, II y III
E) Solo I y III

10) De las siguientes potencias de i, es (son) solución(es) de $1 + x^{10} = 0$

I) – i II) i^{23} III) $-i^{-30}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) I, II y III
E) Solo I y III

11) La expresión $x^2 \cdot i^7 - 36 \cdot i^3$ proviene del desarrollo de:

A) $(6 - x)(6 - x) \cdot i$
B) $(6 - x)(6 - x) \cdot i^3$
C) $(6 + x)(x - 6) \cdot i^3$
D) $(6 + x)(6 - x) \cdot i^3$
E) $(6 - x)(6 + x) \cdot i$